Αλγεβρικές Δομές 16/3

$O_1 \times O_2 \times \dots \times O_k$ ομάδα όταν $O_1, \dots, O_k$ ομάδες

Αν $O_1, \dots, O_k$ κυκλικές τότε $O_1 \times \dots \times O_k$ κυκλική $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|O_i|, |O_j|) = 1 \quad \forall i \neq j$

Παράδειγμα

$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{35}$ κυκλική

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{35}$ όχι κυκλική

$a \in O$ με $o(a) = k$

$o(a^m) = \dfrac{k}{(k, m)}$

$o(a) = k \quad , \quad o(b) = l \qquad o(ab) = ?$

- Αν $ab \neq ba$ δεν γνωρίζουμε
- Αν $ab = ba \Rightarrow o(a,b) = n \quad , \quad \text{εκπ}(k, l) = m$

$(ab)^n \underset{ab=ba}{=} a^n b^n = 1 \Rightarrow a^n = 1$ και $b^n = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow o(a) / n$ και $o(b) / n \Rightarrow k/n$ και $l/n \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{εκπ}(k, l) / n \quad (1)$

$(a,b)^m = a^m \cdot b^m = 1 \Rightarrow o(a,b) / m = \text{ΕΚΠ}(k,l)$ (2)

$ab=ba$

m πολ/σιο του k

m πολ/σιο του l

(1), (2) $\rightarrow \text{ΕΚΠ}(k,l) = o(a,b)$

Συμμετρικές ομάδες S_n

$$S_n = \{ f : \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow{1-1} \{1,2,\dots,n\} \}$$

$$f : \begin{array}{c} (1, 2, \dots, n) \\ \downarrow \\ (f(1), f(2), \dots, f(n)) \end{array}$$

Παράδειγμα

$$f : \begin{array}{c} (1, 2, 3, 4) \\ \downarrow \\ (4, 2, 1, 3) \end{array} \qquad g : \begin{array}{c} (1, 2, 3, 4) \\ \downarrow \\ (4, 3, 2, 1) \end{array}$$

$$f \cdot g \quad \begin{array}{l|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ g & 4 & 3 & 2 & 1 \\ f & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \qquad fg : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$g f \quad \begin{array}{l|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f & 4 & 2 & 1 & 3 \\ g & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \qquad gf : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

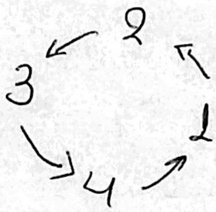
Το S_n με την σύνθεση αποτελεί ομάδα με τάξη n

$n>2 \Rightarrow S_n$ όχι αβελιανή

Τα στοιχεία ονομάζονται <u>μεταθέσεις</u>

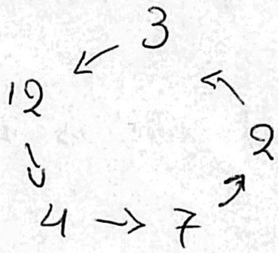
<u>Παραδείγματα</u>

1) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{matrix}$



κύκλος μήκους 4

2) $\begin{matrix} 3 & 12 & 4 & 7 & 2 \\ 12 & 4 & 7 & 2 & 3 \end{matrix}$



Θα το γράφουμε: $(12, 4, 7, 2, 3) = (7, 2, 3, 12, 4)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μια μετάθεση $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα

$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots \to a_k \to a_1$ $(a_i \neq a_j)$ ονομάζεται κύκλος μήκους κ. Εδώ $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

<u>Συμβολίζεται</u> $(a_1, a_2, \dots, a_k)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο κύκλοι $(a_1, \dots, a_k)$ και $(b_1, \dots, b_n)$ θα είναι ξένοι μεταξύ τους αν $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_n\} = \emptyset$

Παράδειγμα

$(2, 7, 4)$ $\quad$ $(1, 3, 5, 12)$ ξένοι.

Ιδιότητες κύκλων

1) $(2,7,4)(2,7,4) = (2,7,4)^2$

$2 \to 7 \to 4$

$7 \to 4 \to 2$

$4 \to 2 \to 7$

Άρα $(2,7,4)^2 = (2,4,7)$

$(2,7,4)(2,7,4)^2 = (2,7,4)^3 = (2,7,4)(2,4,7)$

$2 \to 4 \to 2$

$4 \to 7 \to 4$

$7 \to 2 \to 7$

Άρα $(2,7,4)^3 = 1$ ταυτοτική

$o(2,7,4) = 3$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Κάθε κύκλος μήκους κ έχει τάξη κ

2) $(2,7,4)(1,3,5,12)$ (+)

$1 \to 3 \to 3$
$2 \to 2 \to 7$
$3 \to 5 \to 5$
$4 \to 4 \to 2$
$5 \to 12 \to 12$
$6 \to 6 \to 6$
$7 \to 7 \to 4$
$8 \to 8 \to 8$
$9 \to 9 \to 9$
$10 \to 10 \to 10$
$11 \to 11 \to 11$
$12 \to 1 \to 1$

Άρα μπορώ να γράψω

(++) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 12 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}$ "f

(Οι (+), (++) είναι οι ίδιες μεταθέσεις)

$1 \to 3 \to 5 \to 12 \to 1 \quad = (1,3,5,12) = g$
$2 \to 7 \to 4 \to 2 \quad = (2,7,4) = h$
$6 \to 6,\ 8 \to 8,\ 9 \to 9,\ 10 \to 10,\ 11 \to 11.$

$(1,3,5,12)(2,7,4)$

$1 \to 1 \to 3$
$2 \to 7 \to 7$
$3 \to 3 \to 5$
$4 \to 2 \to 2$
$5 \to 5 \to 12$
$12 \to 12 \to 1$

Παρατηρώ ότι είναι ίδια με πριν
Άρα αντιμετατίθεται
Συνεπώς $o(f) = \text{ΕΚΠ}(\overset{''4}{o(g)}, \overset{''3}{o(h)})$

$o(f) = 12$

ΠΡΟΤΑΣΗ

α) Δύο κύκλοι ξένοι μεταξύ τους αντιμετατίθενται $fg = gf$

β) Αν f και g είναι κύκλοι ξένοι μεταξύ τους τότε

$$o(fg) = \text{ΕΚΠ}\,(o(f),\, o(g))$$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

α. Έστω $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ και $g = (b_1, \ldots, b_n)$

$fg = gf$?

$b_i \to b_{i+1}$

$a_j \to a_{j+1}$

Παρατηρώ ότι

$$fg: \quad b_i \xrightarrow{g} b_{i+1} \xrightarrow{f} b_{i+1}$$
$$a_i \xrightarrow{g} a_i \xrightarrow{f} a_{i+1}$$

$$gf: \quad b_i \xrightarrow{f} b_i \xrightarrow{g} b_{i+1}$$
$$a_i \xrightarrow{f} a_{i+1} \xrightarrow{g} a_{i+1}$$

Άρα $fg = gf$

Παράδειγμα

Έστω $H = \left\{ 1,\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

και $H \leq S_4$ ΝΔΟ $H \leq S_4$ αβελιανή

Λύση

Επειδή $|H| = 4$ πεπερασμένο, αν η πράξη είναι κλειστή τότε $H \leq S_4$

$\sigma_1 = (1,2)(3,4) \Rightarrow o(\sigma_1) = \text{ΕΚΠ}\big(o(1,2), o(3,4)\big) = \text{ΕΚΠ}(2,2) = 2$

$\sigma_2 = (1,3)(2,4) \Rightarrow o(\sigma_2) = 2$

$\sigma_3 = (1,4)(2,3) \Rightarrow o(\sigma_3) = 2$

$\sigma_1\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_3$ (Να δείξω τις ισότητες σπίτι)

$\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2$

$\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1$

$\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3$ $\quad \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2$ $\quad \sigma_3\sigma_2 = \sigma_1$

Άρα η πράξη είναι κλειστή $\Rightarrow H \leq \Sigma_4$

$H = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle$ (ή $H = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ή $H = \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle$)

με τις σχέσεις $o(\sigma_1) = o(\sigma_3) = 2$ και $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$

Άρα $H = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \underbrace{\sigma_1\sigma_3}_{=\sigma_2} = \sigma_3\sigma_1\}$

Αυτή $\underbrace{\text{μοιάζει}}_{\parallel}$ με τις : $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και την ομάδα του klein

υπάρχει απεικόνιση
που τις συνδέει $\rightsquigarrow$ ισομορφισμός

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Έστω $f \in \Sigma_n$ μετάθεση. Τότε η f γράφεται σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.

$f = g_1 g_2 \cdots g_k$ όπου $g_1, \dots, g_k$ κύκλοι ξένοι πιθανόν με διαφορετικό μήκος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας κύκλος μήκους 2 καλείται αντιμετάθεση : $(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$

Παράδειγμα

$(1,3,7,4) = (1,4)(1,7)(1,3)$

$(1,3,7,4) = (4,7)(4,3)(4,1)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Κάθε κύκλος $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ μήκους k γράφεται σαν γινόμενο $k-1$ αντιμεταθέσεων : $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \ldots (a_1, a_2)$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Έστω $f \in \Sigma_n$ μετάθεση. Η f θα γράφεται πάντα σαν γινόμενο περιττού ή άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων αποκλειστικά (χωρίς απόδειξη)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια μετάθεση $f \in \Sigma_n$ καλείται άρτια αν γράφεται σαν άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων. Διαφορετικά καλείται περιττή.

Παράδειγμα

$(1,3,7) = (1,7)(1,3) = (4,7)(1,7)(1,4)(1,3)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Με A_n θα συμβολίζουμε το υποσύνολο της Σ_n το οποίο θα περιέχει <u>όλες</u> τις άρτιες μεταθέσεις. Αυτό ονομάζεται η εναλλάσσουσα υποομάδα της Σ_n.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$A_n \leq \Sigma_n$

Απόδειξη

Αφού είναι πεπερασμένο υποσύνολο αρκεί νδο η πράξη είναι κλειστή. Έστω $f, g \in A_n$. Πρέπει $fg \in A_n$

$$fg = \underbrace{(\ )(\ )\dots(\ )}_{\substack{\text{άρτιο πλήθος} \\ \text{αντιμετ. της } f}} \underbrace{(\ )(\ )\dots(\ )}_{\substack{\text{άρτιο πλήθος} \\ \text{αντιμ. της } g}} \quad \text{άρτιο}$$

Παράδειγμα

$$\Sigma_3 = \{ \underset{}{1}, \underset{f}{(1,2,3)}, \underset{g}{(1,2)}, \underset{f^2}{(1,3,2)}, \underset{fg}{(1,3,2)(1,2) = (2,3)}, \underset{f^2 g}{(1,3)} \}$$

$o(f) = 3$, $o(g) = 2$, $fg = gf^2$

$A_3 \leq \Sigma_3$ με $A_3 = \{1, f, f^2\}$

Παρατηρώ ότι $|A_3| = \dfrac{|\Sigma_3|}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$